Лекция 15_ЖСТ-дағы екі айналмалы денелер есебі мәселесі

ЖСТ бойынша тұрақты массалық денелердің қозғалыс теңдеулерін шығару үшін Фок әдісі қолданылады [1, 2, 3, т.б.]. Бұл дәрісте жалпы салыстырмалық теориясында сыртқы гравитациялық өрістегі айнымалы массалы материалдық нүктенің қозғалыс теңдеулерін шығару үшін Фок әдісінің қолдану мүмкіндігі туралы мәселені қарастырамыз. Бұл ретте ол масса тензорының дивергенциясының теңдігінен нөлдік мәніне дейін қарастырды.

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 . \tag{1}$$

Масс тензордың мына түрін қолданамыз

$$T^{\mu\nu} = \rho^* U^{\mu} U^{\nu} , \tag{2}$$

және көлем бойынша интегралдап, содан кейін концентрацияланған масса шегіне өтіп, Фок (1) шартынан геодезиялық сызықтың теңдеулерін алады.

$$\frac{dU^{\nu}}{d\tau} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta} = 0 . \tag{3}$$

Енді кейбір алдын ала ескертулер жасайық. ЖСТ айнымалы масса деп бөлшектердің эмиссиясына (бекітуіне) байланысты тыныштық массасы уақыт өте өзгеретін массаны айтады [4, 5, 5]. Бұдан әрі нақтылық үшін біз массаның ұшып кету жағдайымен шектелеміз.

Сонымен қатар, ЖСТ айнымалы массалық денелерді қарастыру кезінде біз айнымалы массалық денелердің классикалық механикасының кейбір тәсілдерін де қолданамыз. Яғни, біз дене бетінің қандай да бір бөлігінен бөлшектердің шығарылуы (шығарылуы) болатын айнымалы массадағы денелерді және дененің беткі қабаты жоқ бөлшектерді қарастырумен шектелеміз. денеге байланысты координаталық осьтер жүйесіне қатысты салыстырмалы жылдамдық денеге жатады, ал салыстырмалы жылдамдығы бар бөлшектер денеге жатпайды және оның қозғалысына ешқандай әсер етпейді деп есептейміз. Реактивті күштер мен моменттерді негізгі денеден бөліну сәтіндегі лақтырылған бөлшектер мен дененің жанасу әрекетінің нәтижесі ретінде түсінеміз.

Негізгі кинетикалық шамалар: импульс, кинетикалық импульс және кинетикалық энергия қосындыны салыстырмалы жылдамдығы жоқ денелердің нүктелеріне ғана тарататын тұрақты массалық нүктелер жүйесінің динамикасының формулаларымен анықталатын болады. Бөлгіш бөлшектердің негізгі денемен әрекеттесуі тек бөліну сәтінде ғана болады деген болжам... бөліну сәтіне дейінгі бөлшектердің эмиссия процесіне тәуелді емес заңдылықтарды алуға мүмкіндік береді. Қабылданған гипотеза шеңберінде реактивті бөлшектер қазіргі уақытта ағынды бөлшектерді негізгі дененің бөлшектерінен бөліп тұратын жанасу беті бойымен денеге әсер етеді» [7, 89-90 б.].

Енді (1) шартынан сыртқы гравитациялық өрістегі айнымалы массалық материалдық нүктенің қозғалыс теңдеулерін шығаруға тікелей көшейік. (1) өрнекті пішінде қайта жазайық

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{-g}T^{0\nu}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-g}T^{k\nu}\right)+\sqrt{-g}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}=0. \tag{4}$$

(4) $(dx)^3$ өрнегін көбейтіп, массасы айнымалы сынақ денесі алып жатқан көлемді интегралдаймыз. Содан кейін

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\sqrt{-g}T^{0\nu}(dx)^3+\int\limits_{(a)}\sqrt{-g}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}(dx)^3+\int\limits_{(a)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-g}T^{k\nu}\right)(dx)^3=0. \tag{5}$$

(5) өрнекті масса тензорының құрамдас бөліктерін (2) ауыстырып аламыз.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(a)}\sqrt{-g}\rho^*U^0U^\nu(dx)^3+\int\limits_{(a)}\sqrt{-g}\rho^*U^\alpha U^\beta\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(dx)^3+$$
$$+\int\limits_{(a)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-g}\rho^*U^kU^\nu\right)(dx)^3=0. \tag{6}$$

Жоғарыда келтірілген түсініктемелерге сәйкес, біз айнымалы массасы бар сынақ денесінің массасын уақыттың әр сәтінде келесідей анықтаймыз:

$$cm=\int\limits_{(a)}\rho^*\sqrt{-g}U^0(dx)^3, \tag{7}$$

Яғни, массасы тұрақты денелер жағдайына ұқсас [1, б.314]. Енді (6) концентрацияланған масса шегіне қатысты өтіп, тұрақты массалар үшін ұқсас өрнектермен пішіні сәйкес келетін алғашқы екі интегралдық өрнектерді аламыз [1, 315 б.]

$$\int\limits_{(a)}\sqrt{-g}\rho^*U^0U^\nu(dx)^3=mcV^\nu, \tag{8}$$

$$\int_{(a)} \sqrt{-g}\rho^{*}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta}(dx)^{3} = \frac{mc}{V^{0}}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}, \tag{9}$$

Мұндағы V^{α} – 4- айнымалы массалық материалдық нүктенің жылдамдығы. (8) және (9) қатынастарындағы m массаның уақыт функциясы екенін есте ұстаған жөн. Енді (6) өрнектегі үшінші интегралды қарастырайық. Ең алдымен оны Остроградский-Гаусс теоремасы арқылы түрлендіреміз

$$\int_{(a)} \frac{\partial}{\partial x_{k}}\left(\sqrt{-g}\rho^{*}U^{\nu}U^{k}\right)(dx)^{3} = \oint_{S_a} \sqrt{-g}\rho^{*}U^{\nu}U^{k}dS_{k} \,. \tag{10}$$

Масса қандай да δS бір кішігірім беттен шығады деп есептесек

$$\oint_{S_a} \sqrt{-g}\rho^{*}U^{\nu}U^{k}dS_{k} = A^{\nu}\int_{\delta S}\sqrt{-g}\rho^{*}A^{k}dS_{k} = -A^{\nu}m^{*}c\,, \tag{11}$$

Мұндағы A^{ν} – 4-өлшемді бөлшектердің ұшып шығу жылдамдығы

$$cm^{*} = -\int_{\delta S}\sqrt{-g}\rho^{*}A^{k}dS_{k} \tag{12}$$

уақыт бірлігінде сыртқа ұшып шығатын бөлшектердің ағынының жылдамдығы. Осылайша, (8), (9) және (11) ескере отырып, (6) қатынастан аламыз

$$\frac{dmV^{\nu}}{dt} + m\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{V^{\alpha}V^{\beta}}{V^{0}} = A^{\nu}m^{*}. \tag{13}$$

(13) айнымалы массадағы материалдық нүктеге қатысты уақытқа өтетін болсақ,

$$\frac{dmV^{\nu}}{d\tau} + m\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} = A^{\nu}V^{0}m^{*}, \tag{14}$$

бұл жерде $V^{0} = \dfrac{dt}{d\tau}$ ескеріледі. (14) басқа түрде жазайық

$$V^{\nu}\frac{dm}{d\tau} + m\left(\frac{dV^{\nu}}{d\tau} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}\right) = V^{\nu}\frac{dm}{d\tau} + m\frac{DV^{\nu}}{d\tau} = A^{\nu}V^{0}m^{*}. \tag{15}$$

(15) өрнегін скаляр бойынша V^{ν} көбейтіп

$$V_\nu V^\nu = 1, \quad V^\nu \frac{DV^\nu}{d\tau} = 0, \tag{16}$$

аламыз

$$V^0 m^* = \frac{1}{A^\nu V_\nu} \frac{dm}{d\tau}. \tag{17}$$

(17) қатынас массасы айнымалы материалдық нүктенің тыныштық массасының өзгеруі мен ұщып шыққан бөлшектердің тыныштық массасының арасындағы байланысты орнатады. Шынында да, егер (17) қатынасы айнымалы массалық материалдық нүктенің тиісті санақ жүйесінде $\left(V^0 = 1\right)$ жазылса, онда $d\tau$ бірлік уақыт аралығы үшін біз аламыз.

$$m^* = \frac{dm}{V_\nu A^\nu}. \tag{18}$$

Мұнда m^* массасы айнымалы материалдық нүктенің тиісті $d\tau$ уақыт бірлігіне бөлшектердің шығыны берілген. [1, 70 б.] бастап.

$$A^\nu V_\nu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{W_k^2}{c^2}}}, \tag{19}$$

Мұндағы W_k – ұшып шығатын массасы айнымалы материалдық нүкте бөлшектердің салыстырмалы қозғалысының 3-өлшемді жылдамдығы, онда (18) қатынас түрін алады

$$\frac{m^*}{\sqrt{1 - \frac{W_k^2}{c^2}}} = dm. \tag{20}$$

(20) қатынастан материалдық нүктенің тыныштық массасы өзгергенде айнымалы масса ұшып шыққан бөлшектердің тыныштық массасына тең болмайтыны анық. Алынған массалық ақау салыстырмалы қозғалыстың шығарылатын бөлшектеріне кинетикалық энергияны беру үшін пайдаланылады. Бөлшектердің эмиссиясы кезінде тыныштық массасының аддитивті еместігі айнымалы массаның релятивистік механикасын классикалық механикадан ерекшелендіретін маңызды нүкте болып табылады. Бұл мәселе әдебиеттерде кеңінен көрініс тапқан [3,8,9,10].
Енді (17) қатынасты (15) теңдеулерге ауыстырамыз және нәтижесінде соңында аламыз.

$$\frac{dV^{\nu}}{d\tau}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}=\frac{1}{m}\frac{dm}{d\tau}\left(\frac{A^{\nu}}{A^{\mu}V_{\mu}}-V^{\nu}\right). \tag{21}$$

Бұл Фок әдісі арқылы алынған ЖСТ айнымалы массалы материалдық нүктенің қозғалыс теңдеулері болып табылады.

Қолданылған әдебиет

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961, 563 с.
2. Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата. 1988, 198 с.
3. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М., 1972, 382 с.
4. Закиров У.Н. Механика релятивистских космических полетов. – М.: Наука, 1984. –152 с.
5. Зенгер Е. К механике фотонных ракет. – М.: ИИЛ, 1956.– 143 с.
6. Станюкович К.П. Релятивистское обобщение формулы Циолковского. – В кн.: Некоторые вопросы механики. М., 1958, с.156-161.
7. Федюшин Б.К. О релятивистской ракетодинамике. – В кн.: Труды ЛИАП, вып.58, 1968, с.115-124.
8. Федюшин Б.К. О релятивистской механике с переменной массой покоя. – В кн.: Труды ЛИАП, вып.97, 1976, с.109-113.
9. Абдильдин М.М., Архипкин О.П., Омаров М.С. Об уравнениях движения материальной точки переменной массы в общей теории относительности. – В кн.: Вопросы теории поля. Алма-Ата, 1985, с. 112-120.
10. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. – изд. 3-е перераб. – М.: Просвещение, 1966, Т.2. 398 с.